1. **Diofantove m-torke s Fibonaccijevim brojevima**

   Motivacija: Neka je F_n n-ti Fibonaccijev broj. Tada je s

   $$\{F_{2k}, F_{2k+2}, F_{2k+4}, 4F_{2k+1}F_{2k} + 2F_{2k+3}\}$$

   dana familija Diofantovih četvorki. Uočimo da za $k = 1$ dobivamo Fermatovu četvorku. Navedenu familiju pronašli su 1977. godine Hoggatt i Bergum i postavili slutnju da se trojka $\{F_{2k}, F_{2k+2}, F_{2k+4}\}$ nadopunjuje jedinstveno do četvorke. Slutnju je pokazao Dujella koristeći Bakerovu teoriju o linearnim formama u logaritmima algebarskih brojeva.

   Opis teme: Pokazati da ne postoji Diofantova četvorka koja se sastoji od Fibonaccijevih brojeva te dati pregled rezultata koji su prethodili toj tvrdnji.

   Literatura:

   - F. Luca, Y. Fujita, On Diophantine quadruples of Fibonacci numbers, Glas. Mat. Ser. III 52 (2017), 221-234.
   - Y. Fujita, F. Luca, *There are no Diophantine quadruples of Fibonacci numbers*, Acta Arith. 185 (2018), 19-38.
   - *Diophantine m-tuple page*, 4.1. Hoggatt-Bergum conjecture, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/fib.html`

2. **Fibonacci-Diofantove trojke**

   Motivacija: Diofantova trojka $\{a, b, c\}$ zadovoljava uvjete da je $ab + 1 = \square$, $bc + 1 = \square$, $ac+1 = \square$. Jedno od mogućih poopćenja ovog skupa može biti da zahtijevamo da $ab+1$, $bc + 1$ i $ac + 1$ poprimaju vrijednosti iz skupa $\mathcal{U} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ gdje je (u_n) neki (nedegenerirani) binarni rekurzivni niz.

   Opis teme: Pokazati da ne postoje prirodni brojevi $a < b < c$ takvi da su $ab + 1$, $bc + 1$ i $ac + 1$ Fibonaccijevi brojevi. Nadalje, trojka $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ je jedina koja zadovoljava uvjet da su $ab + 1$, $bc + 1$ i $ac + 1$ Lucasovi brojevi.

   Literatura:

   - F. Luca and L. Szalay, *Fibonacci Diophantine triples*, Glas. Mat. Ser. III 43 (2008), 253-264.
   - F. Luca and L. Szalay, *Lucas Diophantine triples*, Integers 9 (2009), ♯A35, 441-457.

3. * **Racionalne Diofantove m-torke**

   Motivacija: Postoji beskonačno mnogo racionalnih Diofantovih šestorki. Konstrukcije tih parametarskih šestorki u polju racionalnih brojeva zasnovane su na vezi Diofantovih skupova s eliptičkim krivuljama.

   Opis teme: Opisati eliptičke krivulje inducirane racionalnim Diofantovim trojkama. Opisati neke konstrukcije parametarskih racionalnih Diofantovih šestorki, odnosno racionalnih $D(q)$-m-torki.

   Literatura:

   - A. Dujella, *Diophantine m-tuples and elliptic curves*, J. Theor. Nombres Bordeaux 13 (2001), 111-124.

- A. Dujella, *On Mordell-Weil groups of elliptic curves induced by Diophantine triples*, Glas. Mat. Ser. III 42 (2007), 3-18.
- A. Dujella and C. Fuchs, *On a problem of Diophantus for rationals*, J. Number Theory 132 (2012), 2075-2083.
- A. Dujella, M. Kazalicki, M. Mikić, M. Szikszai, *There are infinitely many rational Diophantine sextuples*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2017 (2) (2017), 490-508.
- A. Dujella, M. Kazalicki, V. Petričević, *There are infinitely many rational Diophantine sextuples with square denominators*, J. Number Theory 205 (2019), 340-346.
- G. Dražić, M. Kazalicki, *Rational $D(q)$-quadruples* (preprint), `https://www.researchgate.net/publication/339088733_Rational_Dq_quadruples`
- *Diophantine m-tuple page*, 5. Rational Diophantine m-tuples, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/ratio.html`
- *Diophantine m-tuple page*, 6. Connections with elliptic curves, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/coell.html`

4. **Polinomijalne formule za $D(n)$-četvorke i neke njihove primjene**

   Motivacija: Slutnja je da postoji $D(n)$-četvorka u prstenu (komutativnom s jedinicom) ako i samo ako je n prikaziv kao razlika kvadrata elemenata iz prstena, do na konačno mnogo izuzetaka. U nekim prstenima se egzistencija $D(n)$-četvorki bazira na polinomijalnim formulama kao što je na primjer skup $\{m, m(3k+1)^2+2k, m(3k+2)^2+2k+2, 9m(2k+1)^2+8k+4\}$ koji ima $D(2m(2k+1)+1)$-svojstvo.

   Opis teme: Pokazati kako su izvedene neke polinomijalne formule. Opisati kako su se takve formule primijenile za provjeru slutnje o postojanju $D(n)$-četvorki u prstenima $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ i $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

   Literatura:

   - A. Dujella, *Some polynomial formulas for Diophantine quadruples*, Grazer Math. Ber. 328 (1996), 25-30.
   - F. S. Abu Muriefah and A. Al- Rashed, *Some Diophantine quadruples in the ring* $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, Math. Commun. 9 (2004), 1-8.
   - Z. Franusic, *Diophantine quadruples in the ring* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, Math. Commun. 9 (2004), 141-148.
   - A. Dujella and I. Soldo, *Diophantine quadruples in* $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, An. Stiint. Univ. "Ovidius" Constanta Ser. Mat. 18 (2010), 81-98.
   - I. Soldo, *On the existence of Diophantine quadruples in* $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, Miskolc Math. Notes 14 (2013), 265-277.

5. **$D(n)$-m-torke u prstenu polinoma**

   Motivacija: Neka je n polinom sa cjelobrojnim koeficijentima, tj. $p \in \mathbb{Z}[x]$. *Polinomijalna $D(n)$-m-torka* je $D(n)$-m-torka koju promatramo u prstenu polinoma $\mathbb{Z}[x]$. Dakle, to je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{Z}[x] \backslash \{0\}$ takav da nisu svi polinomi a_i konstante i vrijedi da je umnožak svaka dva polinoma uvećan za n, $a_i a_j + n$, jednak kvadratu nekog polinoma iz $\mathbb{Z}[x]$. Standardno pitanje koje se može postaviti jest koliko veliki ti skupovi mogu biti.

   Opis teme: Pokazati da ne postoji $D(-1)$-četvorka i opisati kako su dobiveni rezultati za veličinu polinomijalnih $D(n)$-m-torki za polinome n stupnja 1 i 2.

Literatura:

- A. Dujella, C. Fuchs and R. F. Tichy, *Diophantine m-tuples for linear polynomials*, Period. Math. Hungar. 45 (2002), 21-33.
- A. Dujella and C. Fuchs, *A polynomial variant of a problem of Diophantus and Euler*, Rocky Mountain J. Math. 33 (2003), 797-811.
- A. Dujella, C. Fuchs and P. G. Walsh, *Diophantine m-tuples for linear polynomials. II. Equal degrees*, J. Number Theory 120 (2006), 213-228.
- A. Jurasic, *Diophantine m-tuples for quadratic polynomials* , Glas. Mat. Ser. III 46 (2011), 283-309.

6. **O proširenju Diofantovog para** $\{1, 3\}$

Motivacija: Diofantov par $\{1, 3\}$ se na beskonačno mnogo načina proširuje do Diofantove četvorke. Može se provjeriti da je $\{1, 3, c_k, c_{k+1}\}$ Diofantova četvorka za $k \geq 1$ gdje je niz (c_k) dan sa

$$c_k = \frac{1}{6}\left((2+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^k - 4\right), \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Opis teme: Pokazati da se Diofantov par $\{1, 3\}$ ne može proširiti do Diofantove petorke. Opisati kako je dobiven analogan rezultat na poopćenje ovog Diofantovog para, $\{k-1, k+1\}$, $k \geq 2$. Reći nešto o proširenjima Diofantovog para $\{1, 3\}$ u prstenima $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Literatura:

- A. Dujella and A. Pethő, *A generalization of a theorem of Baker and Davenport*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 49 (1998), 291-306.
- Y. Fujita, *The extensibility of Diophantine pairs $\{k-1, k+1\}$*, J. Number Theory 128 (2008), 322-353.
- Z. Franušić, *On the extension of the Diophantine pair $\{1, 3\}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$*, J. Integer Seq. 13 (2010), Article 10.9.6
- Z. Franušić, D. Kreso, *Nonextensibility of the pair $\{1, 3\}$ to a Diophantine quintuple in $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$*, J. Comb. Number Theory 3(3) (2011), 1-15.